NOM: **Prénom:** **N° d'Apogée:** **N° de table:**

Université Cadi Ayyad **Année universitaire 2014- 2015**

Faculté des Sciences Semlalia Marrakech **Département de Mathématiques**

Contrôle d'Analyse SMPC – S1 (Durée : 2 heures)

Ce contrôle est composé d'un questionnaire à choix multiple (QCM) de 10 questions et de trois exercices. Dans le QCM, on **entourera** la lettre a, b, c ou d correspondant à la réponse qui semble exacte **sans aucune justification**. La bonne réponse est **unique pour chaque question**. Les solutions des exercices seront rédigées directement sur cette feuille.

QCM (10 points)

Question 1: Laquelle des suites suivantes est strictement croissante ?

a- $u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ b- $u_n = 1 - \frac{3}{n}$ c- $u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}$ d- $u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

Question 2: Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique non nulle de raison q avec $|q| < 1$ alors $(u_n)_n$:

a- est monotone

b- diverge

c- converge vers 0

d- converge vers 0 si $0 < q < 1$ et diverge sinon

Question 3: On considère la suite $(u_n)_n$ définie sur IN et n'ayant aucun terme égal à 0. Soit la suite $(v_n)_n$ définie par $v_n = -\frac{3}{u_n}$. Laquelle des propositions suivantes est vraie ?

a- Si $(u_n)_n$ est décroissante alors $(v_n)_n$ est croissante.

b- Si $(u_n)_n$ est géométrique alors $(v_n)_n$ est aussi géométrique.

c- Si $(u_n)_n$ converge alors $(v_n)_n$ converge.

d- Si $(u_n)_n$ est minorée par 3 alors $(v_n)_n$ est majorée par -1.

Question 4: $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x$

a- vaut 1. b- n'existe pas. c- vaut e^2. d- vaut $\sqrt{e}$.

Elabbassi

Question 5: Le domaine de définition de la fonction f définie par: $f(x) = Arc\cos\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$

est: a- IR b- $[-1;1]$ c- $[0;\pi]$ d- $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

Question 6: Soit f la fonction définie par: $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+x^4}}{x} & \text{si } x<0 \\ \frac{\sin(ax)}{x^2+2x} & \text{si } x>0 \end{cases}$ où $a \in IR$.

Pour quelle valeur de a, f admet-elle un prolongement par continuité en $x=0$?

a- $a=1$ b- $a=-1$ c- $a=\frac{-\pi}{2}$ d- $a=-2$

Question 7: Soit f la fonction définie par: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{shx} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$ alors $f'(0)$:

a- n'existe pas b- vaut 0 c- vaut $\frac{1}{6}$ d- vaut $\frac{1}{3}$

Question 8: Soit f la fonction définie sur IR par: $f(x) = x - \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ alors :

a- f est strictement décroissante.

b- $\forall x \in IR \quad f(x) \neq 0$.

c- f est positive sur IR .

d- L'équation $f(x)=0$ admet une unique solution.

Question 9: Le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de $x_0=5$ de la fonction $f(x) = Lnx$ est :

a- $Ln5 + \frac{(x-5)}{5} - \frac{(x-5)^2}{50} + o((x-5)^2)$.

b- $Ln5 - \frac{(x-5)}{5} + \frac{(x-5)^2}{50} + o((x-5)^2)$.

c- $Ln5 + \frac{(5-x)}{5} - \frac{(5-x)^2}{50} + o((5-x)^2)$.

d- $Ln\frac{1}{5} + \frac{(5-x)}{5} - \frac{(5-x)^2}{50} + o((5-x)^2)$

Question 10: Soit Γ la courbe paramétrée par la fonction vectorielle $\gamma : t \mapsto \gamma(t) = (t^2; t^3+1)$. Le point $M_0(0;1)$ correspondant au paramètre $t=0$ est un point :

a- D'inflexion

b- De rebroussement de deuxième espèce.

c- De rebroussement de première espèce.

d- Non stationnaire.

Elabbassi

Exercice 1 : (4 points) Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ par: $f(x)=\frac{x^2}{2-x^2}$ et soit $(u_n)_n$ la suite récurrente définie par : $\begin{cases} u_0\in]0;1[\\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$.

1°) Vérifier que f est strictement croissante et que $f(x)-x\leq 0$.

....

....

....

....

....

....

2°) Montrer que $\forall n\in IN \quad 0<u_n<1$.

....

....

....

....

....

Elabbassi

3°) Montrer que $(u_n)_n$ est strictement monotone.

....

....

....

....

4°) Montrer que $(u_n)_n$ est convergente et donner sa limite en justifiant.

....

....

....

....

Exercice 2: **(2,5 points)** Calculer le développement limité à l'ordre 3 en $x=0$ de la fonction $f: x \mapsto f(x)=\dfrac{e^x}{1+\sin x}$.

Exercice 3: **(3,5 points)** Soit f une fonction dont le développement de Mac-Laurin à l'ordre 4 s' écrit :

$f(x)=1+ax^2+\left(b+\dfrac{1}{6}\right)x^3+\dfrac{x^4}{24}+R(x)$ où $R(x)$ est le reste de Lagrange.

1°) Déterminer $f^{(p)}(0)$ pour $p=1,2,3,4$.

2°) Préciser la nature du point critique de coordonnées $(0;1)$ suivant les valeurs des réels a et b .

Elabbassi